

2018年6月 問10

一番優しい、統計学の教本
吉田

問10 確率変数 $X_1, \dots, X_n$ が互いに独立にそれぞれ平均 μ , 分散 $\sigma^2 (> 0)$ の正規分布に従うとする。標本平均を $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 不偏分散を $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ とおく。

[1] $\sigma^2 = 1$ のとき, 確率 $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.5) \geq 0.95$ を満たす最小の標本サイズ n はいくらか。次の ① ~ ⑤ のうちから適切なものを一つ選べ。 20

- ① 4 ② 7 ③ 11 ④ 16 ⑤ 22

[2] $n = 20$ のとき, $\bar{X} = 10.50$, $S^2 = 5.41$ を得たとする。そのとき, μ の 95%信頼区間として, 次の ① ~ ⑤ のうちから適切なものを一つ選べ。 21

- | | |
|--|--|
| <p>① $10.50 \pm \frac{2.093 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{20}}$</p> | <p>② $10.50 \pm \frac{2.093 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{19}}$</p> |
| <p>③ $10.50 \pm \frac{2.086 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{20}}$</p> | <p>④ $10.50 \pm \frac{2.086 \times \sqrt{5.41}}{\sqrt{19}}$</p> |
| <p>⑤ $10.50 \pm 2.086 \times \sqrt{5.41}$</p> | |

知っておくべき知識

■95%信頼区間の定義

95%信頼区間を日本語に直すと・・・

■母平均を95%以上の割合で含む区間

$$P\left(\bar{X} - \underbrace{Z_{\alpha/2}}_{1.96} \times \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \underbrace{Z_{\alpha/2}}_{1.96} \times \sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) \geq 0.95$$

95%CI=平均値 $\pm Z_{\alpha/2}$ * 標準誤差

問題文の式を、95%信頼区間の式に近づける

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.5) \geq 0.95$$

$$P(-0.5 \leq \bar{X} - \mu \leq 0.5) \geq 0.95$$

$$P(\bar{X} - 0.5 \leq \mu \leq \bar{X} + 0.5) \geq 0.95$$

絶対値を外す

真ん中を μ にする

$$P(\bar{X} - 1.96 \times \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \times \sqrt{\frac{s^2}{n}}) \geq 0.95$$

変形した式を、95%信頼区間の式と見比べる

$$P(\bar{X} - 0.5 \leq \mu \leq \bar{X} + \boxed{0.5}) \geq 0.95$$



$$1.96 \times \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq 0.5 \quad \text{を満たせば良い！}$$

$$P(\bar{X} - 1.96 \times \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \boxed{1.96 \times \sqrt{\frac{s^2}{n}}}) \geq 0.95$$

あとは計算するのみ！

$$1.96 \times \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq 0.5$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{1.96}{0.5}$$

$$n \geq 15.37$$

正解：4

問 1 2 (2)

$$P\left(\bar{X} - \underset{2.093}{\boxed{t_{\alpha/2}}} \times \sqrt{\frac{s^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \underset{2.093}{\boxed{t_{\alpha/2}}} \times \sqrt{\frac{s^2}{n}}\right) \geq 0.95$$

ν	α			
	0.10	0.05	0.025	
1	3.078	6.314	12.706	3
2	1.886	2.920	4.303	
3	1.638	2.353	3.182	
4	1.533	2.132	2.776	
5	1.476	2.015	2.571	
6	1.440	1.943	2.447	
7	1.415	1.895	2.365	
8	1.397	1.860	2.306	
9	1.383	1.833	2.262	
10	1.372	1.812	2.228	
11	1.363	1.796	2.201	
12	1.356	1.782	2.179	
13	1.350	1.771	2.160	
14	1.345	1.761	2.145	
15	1.341	1.753	2.131	
16	1.337	1.746	2.120	
17	1.333	1.740	2.110	
18	1.330	1.734	2.101	
19	1.328	1.729	2.093	
20	1.325	1.725	2.086	

あとは計算するのみ！

$$10.5 - 2.093 \times \sqrt{\frac{5.41}{20}} \leq \mu \leq 10.5 + 2.093 \times \sqrt{\frac{5.41}{20}}$$

正解：1